OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a VII-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

SoluţiaI

Fie P mijlocul diagonalei AC. Se ştie că $PN \| AB$ şi $PN = \frac{AB-DC}{2}$.......3p

Deci $MN \| AC \iff MNPQ$ paralelogram $\iff PN \equiv AM \iff AM = \frac{AB-DC}{2} \iff$ $ABCD$ isoscel.......4p

SoluţiaII

Fie O intersecţia diagonalelor trapezului. Din teorema lui Thales avem $MN \| AO \iff \frac{BN}{BO} = \frac{BM}{BA}$.....2p

Din asemănarea triunghiurilor BOA şi DOC obţinem $\frac{DO}{BO} = \frac{DC}{AB}$, de unde $\frac{BD}{BO} = \frac{AB+DC}{AB}$, deci $\frac{BN}{BO} = \frac{AB+DC}{2AB}$ 3p

Folosind cele două relaţii deduse deja avem $MN \| AC \iff \frac{BM}{BA} = \frac{AB+DC}{2AB} \iff BM = \frac{AB+DC}{2} \iff ABCD$ isoscel.....2p.

SUBIECTUL II

Metoda I. Fie $x = a + \frac{1}{bc}$, $y = b + \frac{1}{ac}$ şi $z = c + \frac{1}{ab}$.

Avem $\frac{x}{a} = 1 + \frac{1}{abc}$, $\frac{y}{b} = 1 + \frac{1}{abc}$ ....2p şi $\frac{z}{c} = 1 + \frac{1}{abc}$ şi de aici $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$......2p

Aşadar, $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$. Deducem $a = b = c$ şi apoi $a = b = c = 1$......3p

Metoda II. Adunăm ecuaţiile şi obţinem $a + b + c = \frac{a+b+c}{abc}$.....2p

Cazul I: $abc = 1$. Rezultă $a = b = c = 1$.......2p

Cazul II: $a + b + c = 0$. Avem $abc + 1 = 2b^2c = 2c^2a = 2a^2b$, de unde rezultă că a, b, c au acelaşi semn, deci $a + b + c < 0$ sau $a + b + c > 0$. Fals.........3p

SUBIECTUL III

Construim $CP \| AB$ $P \in DE$.....2p În $\triangle CPE$, AF linie mijlocie implică $CP = 2 \cdot AF$......2p În $\triangle BDF$, CP linie mijlocie implică $BF = 2 \cdot CP$, deci $BF = 4 \cdot AF$ sau $AB + AF = 4 \cdot AF$, de unde $AB = 3AF$.......3p

SUBIECTUL IV

a) Se observă că $a + b = 1$........1p

b) Calculăm $a + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2010} = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{2}{1\cdot2\cdot3} + \frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \ldots + \frac{2010}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2010} = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{2}{1\cdot2\cdot3} + \frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \ldots \frac{2008}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2009} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2009} = \ldots = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{2}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{1\cdot2} = 1.$

De aici rezultă că $a < 1$.......3p

c) Din $a+b=1$ şi $a=1-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2010}$, obţinem $b=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2010}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot \ldots\cdot\frac{1}{2010}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{2009}}$.......3p